به نام خدا

ریاضی مهندسی پیشرفته

موضوع: حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

به نام خدا

معادلات با مشتقات جزئی

هر معادله از x و y و u و مشتقات جزئی u نسبت به x و y به یک معادله با مشتقات جزئی موسوم است.

فرم کلی معادله درجه دوم با مشتقات جزئی

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$$

که در آن A و B و C و D و E و F ثابت می باشند.

اگر $B^2-4AC>0$ معادله لاپلاس

اگر $B^2-4AC=0$ معادله گرما

اگر $B^2-4AC<0$ معادله موج

P.D.E → روش تحلیل

P.D.E → روش عددی

حل عددی معادلات دیفرانسیل بیضوی گون: حالت همگن $\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=0$

حالت عمومی $\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$

$$u(x+h,y)=u(x,y)+h\,u_x(x,y)+\frac{1}{2}h^2u_{xx}(x,y)+\frac{1}{6}h^3u_{xxx}(x,y)+\cdots$$

$$u(x-h,y)=u(x,y)-h\,u_x(x,y)+\frac{1}{2}h^2u_{xx}(x,y)-\frac{1}{6}h^3u_{xxx}(x,y)+\cdots$$

$$u(x+h,y)-u(x-h,y)=2h\,u_x(x,y)$$

$$u_x(x,y)=\frac{1}{2h}\left[u(x+h,y)-u(x-h,y)\right]$$

$$u_y(x,y)=\frac{1}{2k}\left[u(x,y+k)-u(x,y-k)\right]$$

$$u(x+h,y)+u(x-h,y)=2u(x,y)+h^2u_{xx}(x,y)$$

$$u_{xx}=\frac{1}{h^2}\left[u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)\right]$$

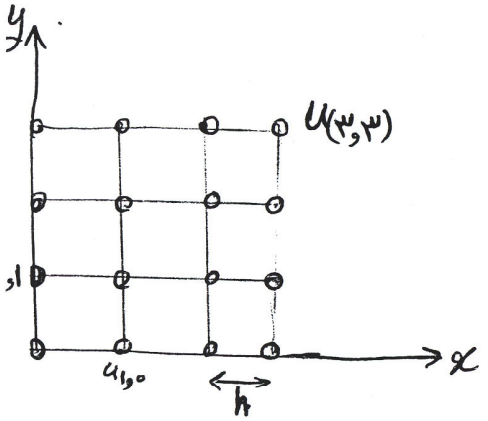
$$u_{yy}=\frac{1}{k^2}\left[u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)\right]$$ با برابر قرار دادن $h=k$

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{1}{h^2}\left[u(x+h,y)+u(x,y+h)+u(x-h,y)+u(x,y-h)-4u(x,y)\right]$$

$$\boxed{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=0}$$ همگن

$$u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{ij}=h^2f(x,y)$$ ناهمگن

مثال: اگر $h=\frac{2}{3}$ با شرایط اولیه داده شده نقاط را پیدا کنید.



$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 \qquad 0<x<2 \text{ و } 0<y<2$$

$$u(0,y)=0 \qquad u(2,y)=y(2-y). \qquad 0<y<2$$

$$u(x,0)=0 \qquad u(x,2)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 0\leq x<2 \end{cases}$$

مقدار شرایط مرزی

$$P_{31}=P(3h,h)=P\left(2,\frac{2}{3}\right)\Rightarrow u\left(2,\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)=\boxed{\frac{8}{9}}$$

$$y(2-y)$$

$P_{13}=P(h,3h)=P\left(\frac{2}{3},2\right)\Rightarrow$ $u\left(\frac{2}{3},2\right)\Rightarrow$ نتیجه x بین ۰ و ۱. $\boxed{\frac{2}{3}}$

$P(2,3) = P(2h, 3h) = P(\frac{4}{3}, 2) \Rightarrow$ $y=2$ چون $\Rightarrow 2-x \Rightarrow$

$2 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$ $\qquad u_{01} = u_{10} = 0$

$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$

$i=1, j=1 \quad u_{21} + u_{12} + \cancel{u_{01}} + \cancel{u_{10}} - 4u_{11} = 0$

$u_{01} = u(0, \frac{2}{3}) = 0$ و $u_{10} = u(\frac{2}{3}, 0) = 0$

$u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = 0$

$i=2, j=1 \quad u_{11} - 4u_{21} + u_{22} = -8/9$

$i=1, j=2 \quad u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = -\frac{2}{3}$

$i=2, j=2 \quad u_{21} + u_{12} - 4u_{22} = -14/9$

$u_{11} = \frac{7}{36} \qquad u_{21} = \frac{5}{12}$ حال ۴ معادله ۴ مجهول داریم حل می‌شود

$u_{12} = \frac{13}{36} \qquad u_{22} = \frac{7}{12}$

تعداد نقاطی که باید بدست بیاوریم از رابطه زیر بدست می‌آید.

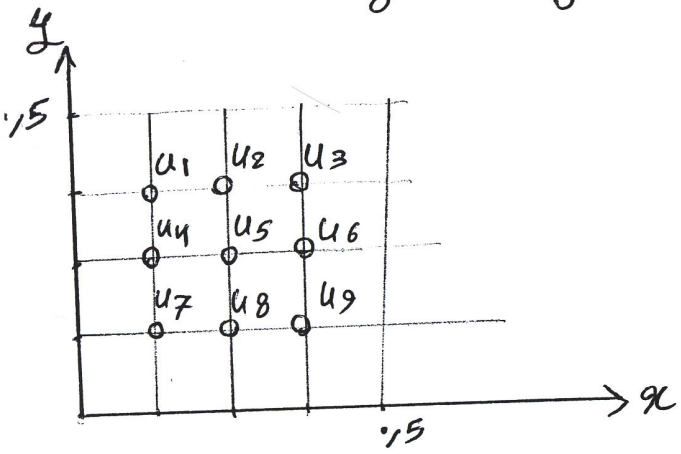
$(n-1)^2 =$

مثال: تعیین حالت یکنواخت توزیع گرما در یک صفحه فلزی نازک به شکل مربع به ابعاد

۰٫۵ متر در ۰٫۵ متر با شرایط مرزی داده شده.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad u(0,y)=0 \;,\; u(x,0)=0 \qquad u(x,0.5)=200x \;,\; u(5,y)=200y$$

$$4u_{ij} - u_{i+1\,j} - u_{i-1\,j} - u_{i\,j-1} - u_{i\,j+1} = 0$$



به ازای $i = 1,2,3$ و $j = 1,2,3$

$$4u_1 - u_2 - u_4 = u_{03} + u_{14}$$

$$4u_2 - u_3 - u_1 - u_5 = u_{24}$$

$$4u_3 - u_2 - u_6 = u_{43} + u_{34}$$

$$4u_4 - u_5 - u_1 - u_2 = u_{04}$$

$$4u_5 - u_6 - u_4 - u_2 - u_8 = 0$$

$$4u_6 - u_5 - u_3 - u_9 = u_{42}$$

$$4u_7 - u_8 - u_4 = u_{01} + u_{10}$$

$$4u_8 - u_9 - u_7 - u_5 = u_{20}$$

$$4u_9 - u_8 - u_6 = u_{30} + u_{41}$$

از شرایط مرزی داریم:

$$u_{10} = u_{20} = u_{30} = u_{01} = u_{02} = u_{03} = 0$$

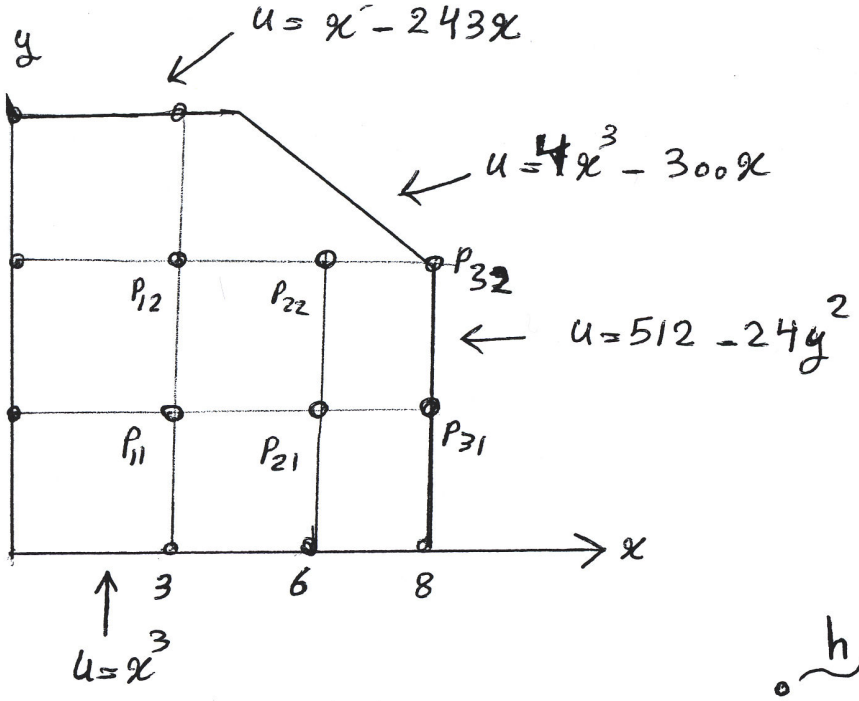
$$u_{14} = u_{41} = 25 \qquad u_{24} = u_{42} = 50 \;,\; u_{34} = u_{43} = 75$$

حال معادله‌ها را بصورت ماتریس نوشته و حل می‌کنیم.

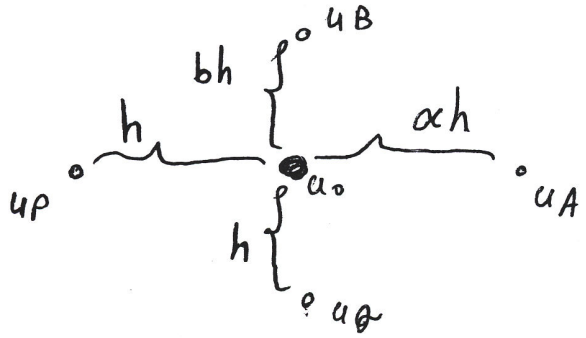
$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$$

مقادیر u_1 و u_2 و .... و u_9 که از روش گاوس - سیدل روی این ماتریس پیدا می‌شوند

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_i	18,75	37,50	56,26	12,50	25	37,5	6,25	12,50	18,75



معادلات ناهمگن:



از معادله تیلور داریم.

$$u_A = u_0 + \alpha h \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}(\alpha h)^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \cdots$$

$$u_P = u_0 - h \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}(h)^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \cdots$$

$$u_A + \alpha u_P = (1+\alpha)u_0 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)h^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \simeq \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{\alpha(1+\alpha)}u_A + \frac{1}{1+\alpha}u_P - \frac{1}{\alpha}u_0\right]$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{b(1+b)}u_B + \frac{1}{1+b}u_Q - \frac{1}{b}u_0\right]$$

$$\nabla^2 u_0 = \frac{2}{h^2}\left[\frac{u_A}{\alpha(1+\alpha)} + \frac{u_B}{b(1+b)} + \frac{u_P}{1+\alpha} + \frac{u_Q}{1+b} - \frac{(a+b)u_0}{ab}\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad , b = \frac{1}{2} \qquad \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & 4/3 & \\ \frac{2}{3} & -4 & \frac{4}{3} \\ & \frac{2}{3} & \end{bmatrix}$$

درحالت کلی به این فرمول می‌رسیم.

$$\nabla^2 u_0 \simeq \frac{2}{h^2}\left[\frac{u_A}{\alpha(\alpha+p)} + \frac{u_B}{b(b+q)} + \frac{u_P}{p(p+\alpha)} + \frac{u_Q}{q(q+b)} - \frac{\alpha p + b q}{\alpha b p q} u_0\right]$$

مثال: با توجه به شکل صفحه قبل نقاط را بدست آورید.

$$\alpha h = 2 \Rightarrow h = 3 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}} \qquad bH = ۳ \Rightarrow H = ۳ \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$P_{11}, P_{12} = \begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix}, P_{21} = \begin{Bmatrix} & 0{,}5 & \\ 0{,}6 & -2{,}5 & 0{,}9 \\ & 0{,}5 & \end{Bmatrix}, P_{22} = \begin{Bmatrix} & 0{,}9 & \\ 0{,}6 & -3 & 0 \\ & 0{,}6 & \end{Bmatrix}$$

$$P_{31} = 296 \qquad P_{32} = -352 \qquad P_{13} = -702$$

$$-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0 - ۲۷ = -۲۷$$

$$0{,}6u_{11} - 2{,}5u_{21} + 0{,}5u_{22} = 0{,}9(296) - 0{,}5(216) = -374{,}4$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & -2{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -374{,}4 \\ -7{,}2 \\ 1159{,}2 \end{bmatrix} \qquad u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = 702$$

مثال:

$$u_t = u_{xx} \begin{cases} u(x,0) = x \\ u_x(x,0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u(0,x) = x \\ u(t,0) = 0 \\ u(t_0,3) = 0 \end{cases}$$

زمان $\Rightarrow u(t,x)$ $\quad \begin{cases} u(t-1,x) \\ u(t-2,x) \\ u(t-1,x-1) \end{cases}$

$u(x,\infty$ $\quad$ یک روش محدود

$$\frac{u(t+1) - u(t,x)}{h} = \frac{1}{h^2}\left[u(t,x+h) + u(t,x-h) - 2u(t,x)\right]$$

$$u(t+h,x) = u(t,x) + \frac{1}{h}\left[(u(t,x+h) + u(t,x-h) - 2u(t,x)\right]$$

$$t=0 \Rightarrow u(\lambda,x) = u(0,x) + \frac{1}{h}\left[u(0,x,\lambda) + u(0,x-\lambda) - 2u(0,x)\right]$$

$$\begin{cases} x = 0.1 \\ x = 0.2 \end{cases} \Rightarrow \quad u(0.1, 0.1) = \checkmark \qquad x = 0.20 \Rightarrow u(0.1, 0.3) = \checkmark$$

$x = 0 \Rightarrow u(t,0)$

$x = 3 \Rightarrow u(t,3)$

	$t=0$	$t=0.1$	$t=0.2$	$t=0.3$
0	0	0	0	0
0.1	0	0.1	0.1	0.1
0.2	0	0.2	0.2	0.2
0.3	0	0.3	0.3	0.3

$u(0.1, 0.3) = 0$

$u(0,0) = 0$ و .....