In The Name of GOD

Fourier Series & Fourier Transform

Source : Dr. razavi mathematical book

Student : F. Alaei

سری فوریه

۳-۱) شرط داشتن سری فوریه:

شرط داشتن سری فوریه، اینست که تابع در شرایط زیر صدق کند (شرایط دیریکله):

a) $f(x)$ متناوب و کراندار باشد یا $\int_T |f(x)|dx < \infty$.

b) تعداد ناپیوستگی‌ها در یک دوره تناوب محدود باشد.

c) تعداد حداکثرها و حداقل‌ها در یک دوره تناوب محدود باشد.

با داشتن شرایط فوق می‌توان $f(x)$ را بصورت یک سری فوریه از صورتهای زیر نمایش داد:

۳-۲) سری فوریه حقیقی:

۳-۲-۱) سری فوریه اصلی:

اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T = 2l$ باشد:

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)\Rightarrow\begin{cases}a_o=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\end{cases}$$

۳-۲-۱-۱) نکات سری فوریه اصلی:

۱) $\frac{a_o}{2}$ = مقدار متوسط موج = موج DC مقدار = ——————————

۲) ضرایب سری فوریه $f_1(x)+f_2(x)$، برابر مجموع ضرایب سری فوریه $f_1(x)$ و $f_2(x)$ می‌باشد و همچنین ضرایب سری فوریه $cf(x)$، c برابر ضرایب سری فوریه $f(x)$ می‌باشد.

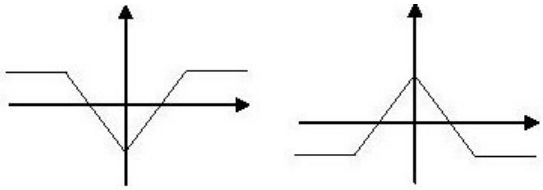
۳) بدیهی است که سری فوریه‌ای مناسب‌تر است که با تعداد جملات کمتری به رفتار تابع واقعی نزدیکتر شود و البته این موضوع زمانی رخ می‌دهدکه ضرایب سری فوریه با افزایش n سریعتر کوچک شوند و به صفر میل کنند.

۴) اگر تابع $f(x)$ متقارن نیم‌موج با دوره تناوب T باشد، تمامی ضرایب a_n و b_n به‌ازای nهای زوج و صفر، برابر صفر است.

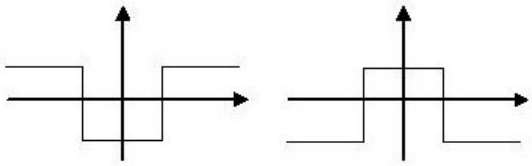
۵) در برخی توابع، تابع داده شده زوج یا فرد یا متقارن نیم‌موج نمی‌باشد، ولی با کم کردن مقدار متوسط موج (مقدار DC تابع)، تابع به تابعی زوج یا فرد یا متقارن نیم‌موج تبدیل می‌گردد. برای نوشتن سری فوریه این توابع، ابتدا مقدار متوسط موج را کم می‌کنیم و سپس سری فوریه تابع زوج یا فرد را با فرمولهای که در مباحث بعدی مطرح می‌شود، بدست می‌آوریم.

۶) در برخی توابع، تابع داده شده زوج یا فرد نمی‌باشد، ولی با انتقال تابع در جهت محور x، تابع به تابعی زوج یا فرد تبدیل می‌گردد. برای نوشتن سری فوریه این توابع، ابتدا موج را انتقال داده و سپس سری فوریه تابع زوج یا فرد را با فرمولهایی که در مباحث بعدی مطرح می‌شود، بدست می‌آوریم.

۷) شکل موج مثلثی رو به پائین دارای ضرایب سری فوریه منفی می‌باشد و شکل موج مثلثی رو به بالا دارای ضرایب سری فوریه مثبت می‌باشد.



۸) شکل موج مربعی رو به پائین دارای ضریب منفی برای اولین جمله سری فوریه می‌باشد و شکل موج مربعی رو به بالا دارای ضریب مثبت برای اولین جمله سری فوریه می‌باشد.



۳-۲-۲) سری‌فوریه $f(x)$ زوج یا کسینوسی:

اگر $f(x)$ تابعی زوج ومتناوب با دوره تناوب $T=۲l$ باشد:

$$f(x)=\frac{a_o}{۲}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)\Rightarrow\begin{cases}a_o=\frac{۲}{l}\int_o^l f(x)dx\\ a_n=\frac{۲}{l}\int_o^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\end{cases}$$

✓ اگر گفتند بسط کسینوسی تابع $f(x)$ را در بازه (a و b) بنویسید، داریم: $T=۲(b-a)$ و $l=b-a$

مثال

(۶۸۰۲) بسط فوریه تابع دلتای دیراک $\delta(t)$ کدام است ؟

۱) $\delta(t)=\sum_{n=o}^{\infty}\cos nt$

۲) $\delta(t)=۱+\sum_{n=1}^{\infty}\sin nt$

۳) $\delta(t)=\sum_{n=o}^{\infty}\sin nt$

۴) $\delta(t)=\frac{۱}{\pi}\left(\frac{۱}{۲}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt\right)$

(۶۸۰۲) گزینه ۴:

تابع $\delta(t)$ زوج است، لذا $b_n=o$ و داریم:

$$a_o=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)dt=\frac{۱}{\pi}\quad,\quad a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta(t)\cos nt\,dt=\frac{۱}{\pi}\cos(o)=\frac{۱}{\pi}\ \rightarrow\delta(t)=\frac{a_o}{۲}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)\right)\rightarrow$$

$$\delta(t)=\frac{۱}{۲\pi}+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt=\frac{۱}{\pi}\left(\frac{۱}{۲}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt\right)$$

مثال

(۷۸۰۱) دوره تناوب و ضریب a_n در بسط فوریه تابع $f(x)=|\sin \pi x|$ کدامند؟

۱) تناوب ۱ و $a_n=\frac{۴}{\pi(۱-۴n^۲)}$

۲) تناوب π و $a_n=\frac{۴}{\pi(۱-۴n^۲)}$

۳) تناوب π و $a_n=\frac{\pi}{۴n^۲-۱}$

۴) تناوب ۱ و $a_n=\frac{\pi}{۴n^۲-۱}$

(۷۸۰۱) گزینه ۱:

دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\sin \pi x|$، برابر ۱ می‌باشد:

$$f(x+۱)=|\sin \pi(x+۱)|=|\sin(\pi x+\pi)|=|-\sin \pi x|=|\sin \pi x|=f(x)$$

تابع $f(x)$ زوج است، لذا $b_n=o$ و داریم:

$$a_o=\frac{۲}{l}\int_o^l f(x)dx=۴\int_o^{\frac{۱}{۲}}\sin \pi x dx=\left[-\frac{۴}{\pi}\cos \pi x\right]_o^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۴}{\pi}$$

حال اگر در گزینه‌ها به جای n مقدار صفر قرار دهیم تنها در گزینه ۱ مقدار $a_o=\frac{۴}{\pi}$ و $T=۱$ می‌باشد.

مثال

(۶۹۰۱) اگر $f(t+۲)=f(t)$ ***و*** $f(t)=\begin{cases} t & o\le t<۱ \\ ۲-t & ۱\le t<۲ \end{cases}$ ***، آنگاه سری فوریه تابع*** $f(t)$ ***عبارتست از:***

۱) $\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲}{n^۲\pi^۲}\cos\frac{n\pi}{۲}t$

۲) $\frac{۱}{۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴}{(۲n-۱)^۲\pi^۲}\cos(۲n-۱)\pi t$

۳) $\frac{۱}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(۲\sin\frac{n\pi}{۲}\right)\cos n\pi t$

۴) $\frac{۱}{۲}-\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۲}{n^۲\pi^۲}\cos\frac{n\pi}{۲}\right)\cos\frac{n\pi}{۲}t$

(۶۹۰۱) گزینه ۲:

روش اول:

تابع $f(t)$ زوج است، لذا $b_n=o$ و داریم:

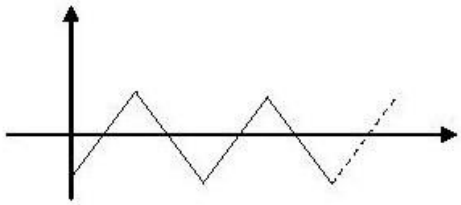
$$T=۲l=۲\to l=۱\ ,\ a_o=\frac{۲}{۱}\int_o^l t\,dt=۱$$

$$a_n=\frac{۲}{l}\int_o^l f(t).\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt=\frac{۲}{۱}\int_o^۱ t.\cos(n\pi t)dt=۲\left[\frac{t}{n\pi}\sin(n\pi t)+\frac{۱}{n^۲\pi^۲}\cos(n\pi t)\right]_o^۱=\frac{۲}{n^۲\pi^۲}(\cos(n\pi)-۱)$$

$$a_n=\begin{cases} o & n=۲k \text{ زوج} \\ \frac{-۴}{(n\pi)^۲} & n=۲k-۱ \text{ فرد} \end{cases}\Rightarrow f(t)=\frac{۱}{۲}-\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۴}{(۲k-۱)^۲\pi^۲}\cos(۲k-۱)\pi t$$

روش دوم:

در شکل تابع $f(t)$، با حذف مقدار DC که برابر $\frac{۱}{۲}$ است، شکل موج بدست آمده به صورت زیر می‌شود که دارای تقارن نیم‌موج می‌باشد. بنابراین فقط ضرایب کسینوسی با جملات فرد داریم. پس گزینه ۲ صحیح است.



مثال **(۸۱۰۱) سری فوریه تابع دوره‌ای $f(t)$ با دوره تناوب $T=۴$: $f(t)=\begin{cases} ۲ & -۱<t<۱ \\ o & ۱<t<۳ \end{cases}$ کدام است؟**

۱) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi}{۲}t+\cdots\right]$

۲) $\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{\pi}\left[\cos\pi t-\frac{۱}{۳}\cos ۳\pi t+\cdots\right]$

۳) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi}{۲}t+\cdots\right]$

۴) $۱+\frac{۴}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi}{۲}t+\cdots\right]$

(۸۱۰۱) گزینه ۳:

روش اول:

تابع $f(t)$ زوج است، لذا $b_n=o$ و داریم:

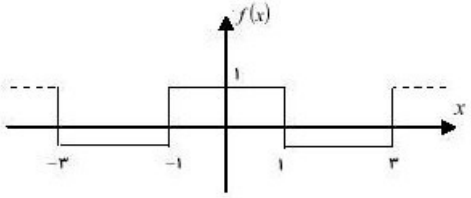
$$a_o=\frac{۲}{l}\int_o^l f(t)dt=\frac{۲}{۲}\int_o^۱ ۲dt=[۲t]_o^۱=۲$$

$$a_n=\frac{۲}{l}\int_o^l f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)dt=\frac{۲}{۲}\int_o^۱ ۲\cos\left(\frac{n\pi t}{۲}\right)dt=\frac{۴}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi t}{۲}\right)\right]_o^۱=\frac{۴}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{۲}\right)$$

$$a_n=\begin{cases} o & n=۲k \\ \frac{۴}{\pi(۲k-۱)}\sin\left(\frac{۲k-۱}{۲}\right)\pi & n=۲k-۱ \end{cases} \quad\Rightarrow\quad f(t)=\frac{۲}{۲}+\frac{۴}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{۲}t-\frac{۱}{۳}\cos\frac{۳\pi}{۲}+\ldots\right)$$

روش دوم:

در شکل تابع $f(t)$، با حذف مقدار DC که برابر $\frac{a_o}{۲}=۱$ است، شکل موج بدست آمده به صورت زیر می‌شود که دارای تقارن نیم‌موج می‌باشد. بنابراین فقط ضرایب کسینوسی با جملات فرد داریم. پس گزینه ۳ صحیح است.



مثال **(۷۶۰۲) حاصل کدامیک از سری‌های زیر را می‌توان به کمک بسط فوریه تابع متناوب $f(x)=|x|$ در بازه $(-۱ و ۱)$ بدست آورد؟**

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$

۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n)^۲}$

۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n^۲}$

(۷۶۰۲) گزینه ۱:

روش اول:

تابع $f(x)$ زوج است، لذا $b_n=o$ و داریم:

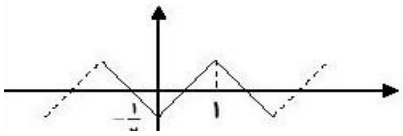
$$a_o=\frac{۲}{l}\int_o^l f(x)dx=\frac{۲}{۱}\int_o^۱ x.dx=۱$$

$$a_n=\frac{۲}{l}\int_o^l f(x).\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{۲}{۱}\int_o^۱ x.\cos(n\pi x)dx=۲\left[\frac{x}{n\pi}\sin(n\pi x)+\frac{۱}{n^۲\pi^۲}\cos(n\pi x)\right]_o^۱=\frac{۲}{n^۲\pi^۲}(\cos(n\pi)-۱)$$

$$a_n=\begin{cases} o & n \text{ زوج} \\ \frac{-۴}{(n\pi)^۲} & n \text{ فرد} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{\pi^۲}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}\cos(۲n-۱)\pi x$$

روش دوم:

در شکل تابع $f(t)$، با حذف مقدار DC که برابر $\frac{a_o}{۲}=\frac{۱}{۲}$ است، شکل موج بدست آمده به صورت زیر می‌شود که دارای تقارن نیم‌موج می‌باشد. بنابراین فقط ضرایب کسینوسی با جملات فرد داریم. پس گزینه ۱ صحیح است.



مثال

(۸۵۳۱) سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع f را بنویسید هر گاه در ناحیه ای که f غیر صفر است تعریف آن به صورت $f(x)=H(-x)-۲H(۱-x)+H(۲-x)$ باشدکه در آن $H(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$:

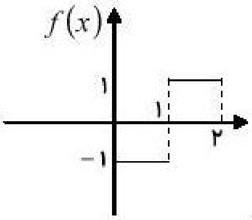
۱) $f(x)\sim\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{m-۱}}{\pi(۲m-۱)}\cos\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$ **۲)** $f(x)\sim\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{m-۱}}{\pi(۲m-۱)}\cos\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$

۳) $f(x)\sim\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{-۴(-۱)^{m-۱}}{\pi(۲m-۱)}\cos\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$ **۴)** $f(x)\sim\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{-۲(-۱)^{m}}{\pi(۲m-۱)}\cos\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$

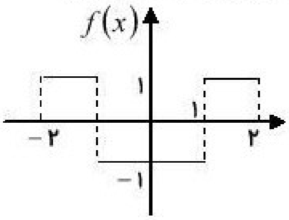
<u>(۸۵۳۱) گزینه ۳:</u>

$$f(x)=H(-x)-۲H(۱-x)+H(۲-x)=\begin{cases}۱ & x<۰\\ ۰ & x>۰\end{cases}+\begin{cases}-۲ & x<۱\\ ۰ & x>۱\end{cases}+\begin{cases}۱ & x<۲\\ ۰ & x>۲\end{cases}=\begin{cases}۰ & x<۰\\ -۱ & ۰<x<۱\\ ۱ & ۱<x<۲\\ ۰ & x>۲\end{cases}$$

چون سری فوریه کسینوسی را خواسته است، پس تابع را زوج در نظر می‌گیریم:



$\Rightarrow$ تابع زوج $\Rightarrow$



از شکل بالا مشخص است که $f(x)$ دارای تقارن نیم‌موج است. پس فقط جملات کسینوسی با n های فرد $(n=۲m-۱)$ داریم:

$$a_n=\frac{۲}{l}\int_۰^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\int_۰^۲ f(x)\cos\left(\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}\right)dx=-\int_۰^۱\cos\left(\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}\right)dx+\int_۱^۲\cos\left(\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}\right)dx=$$

$$\frac{۲\cos mx}{(۲m-۱)\pi}+\frac{۲\cos mx}{(۲m-۱)\pi}=\frac{۴\cos mx}{(۲m-۱)\pi}=\frac{۴(-۱)^{m}}{(۲m-۱)\pi}=\frac{-۴(-۱)^{m-۱}}{(۲m-۱)\pi}\Rightarrow f(x)=\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{-۴(-۱)^{m-۱}}{(۲m-۱)\pi}\cos\frac{(۲m-۱)\pi x}{۲}$$

۳-۲-۳) سری فوریه $f(x)$ فرد یا سینوسی:

اگر $f(x)$ تابعی فرد ومتناوب با دوره تناوب $T=۲l$ باشد:

$$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)\Rightarrow b_n=\frac{۲}{l}\int_۰^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

✓ اگر گفتند بسط سینوسی تابع $f(x)$ را در بازه $(a$ و $b)$ بنویسید، داریم: $T=۲(b-a)$ و $l=b-a$

مثال

(۸۵۳۲) هرگاه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{۲}}$ باشد، حاصل $\int_{o}^{\pi} f(x)\sin^{۳} xdx$ کدام گزینه است؟

۱) صفر **۲) $\frac{۳\pi}{۸}$** **۳) $\frac{۳\pi}{۱۶}$** **۴) $\frac{۱۳\pi}{۳۶}$**

(۸۵۳۲) گزینه ۴:

رابطه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{۲}}$ نتیجه می‌دهد که $f(x)$ دارای بسط فوریه سینوسی با $l=\pi$ می‌باشد $\left(\sin\frac{n\pi x}{l}=\sin\frac{n\pi x}{\pi}=\sin nx\right)$. حال داریم:

$$\int_{o}^{\pi} f(x)\sin^{۳} xdx=\int_{o}^{\pi} f(x)\frac{۳\sin x-\sin ۳x}{۴}dx=\frac{۳}{۴}\int_{o}^{\pi} f(x)\sin xdx-\frac{۱}{۴}\int_{o}^{\pi} f(x)\sin ۳xdx=\rightarrow$$

$$\rightarrow=\frac{\pi}{۲}\left(\frac{۳}{۴}\left(\frac{۲}{\pi}\int_{o}^{\pi} f(x)\sin xdx\right)-\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{\pi}\int_{o}^{\pi} f(x)\sin ۳xdx\right)\right)=\frac{۳\pi}{۸}b_{۱}-\frac{\pi}{۸}b_{۳}$$

که در رابطه بالا $b_{۱}$ و $b_{۳}$ برابر ضریب‌های مربوط به جملات اول و سوم بسط فوریه سینوسی تابع $f(x)$ است. پس داریم:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{۲}}=\frac{۱}{۱}\sin x+\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۱}{۹}\sin ۳x+\cdots\rightarrow b_{۱}=۱ \text{ و } b_{۳}=\frac{۱}{۹}\rightarrow \text{حاصل انتگرال}=\frac{۳\pi}{۸}\times ۱-\frac{\pi}{۸}\times\frac{۱}{۹}=\frac{۱۳\pi}{۳۶}$$

✓ اگر تابع $f(x)$ متقارن نیم‌موج و فرد باشد داریم: $\begin{cases} a_n=o & \forall n \\ b_n=o & n \text{ زوج} \end{cases}$، پس فقط $b_n=\frac{۲}{l}\int_{o}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$ با nهای فرد داریم.

۳-۲-۴) نکات سری فوریه اصلی:

۱) سری فوریه در نقاط پیوستگی به $f(x)$ و در نقاط ناپیوستگی به $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{۲}$ همگرا است.

۲) **پدیده گیبس:** در نقاط ناپیوستگی، سری فوریه یک ripple به اندازه ۹٪ جهش از خود نشان می‌دهد.

۳) **انتگرال‌گیری از سری فوریه:** از سری فوریه می‌توان انتگرال معین گرفت. ولی اگر بخواهیم سری حاصل از سری فوریه مساوی سری فوریه طرف اول باشد باید $(a_o = o)$ باشد.

✓ یکی از حالتهایی که $a_o = o$ می‌باشد، هنگامی است که تابع $f(x)$ فرد باشد.

مثال

(۷۸۰۲) اگر بسط سری کسینوسی فوریه $f(x)=x$ و $o<x<\pi$ بصورت $f(x)=\frac{\pi}{۲}-\frac{۴}{\pi}\left(\cos x+\frac{۱}{۳^۲}\cos ۳x+\frac{۱}{۵^۲}\cos ۵x+\cdots\right)$ باشد، بسط سری فوریه سینوسی $g(x)=x(\pi-x)\frac{\pi}{۸}$ و $o<x<\pi$ برابر است با:

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{(۲n)^۳}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(۲n+۱)x}{(۲n+۱)^۳}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ۲nx}{n^۳}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^۳}$

(۷۸۰۲) گزینه ۴:

$$f(x)=x \quad , \quad \int_o^x f(x)=\frac{x^۲}{۲} \quad , \quad g(x)=x(\pi-x)\frac{\pi}{۸}=\left(\pi x-x^۲\right)\frac{\pi}{۸}=\left(\pi x-۲\int_o^x f(x)\right)\frac{\pi}{۸}$$

$$g(x)=\frac{\pi}{۸}\left[\pi x-۲\left(\frac{\pi}{۲}x-\frac{۴}{\pi}\left(\sin x+\frac{۱}{۳^۳}\sin ۳x+\ldots\right)\right)\right]=\sin x+\frac{۱}{۳^۳}\sin ۳x+\frac{۱}{۵^۳}\sin ۵x+\ldots$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^۳}$$

۴) **مشتق‌گیری از سری فوریه:** از سری فوریه می‌توان مشتق گرفت. آنگاه سری حاصل از مشتق در هر نقطه به $\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{۲}$ همگرا است.

۵) **تساوی پارسوال:** اگر تابع $f(x)$ با دوره تناوب $T=۲l$ باشد و در شرایط دیریکله صدق کند، آنگاه داریم:

$$f(x)=\frac{a_o}{۲}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)\Rightarrow\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}[f(x)]^۲\,dx=۲\left(\frac{a_o}{۲}\right)^۲+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^۲+b_n^۲\right)$$

- -

- -

مثال

(۷۶۰۱) در سری فوریه مثلثاتی تابع $f(t)=\sin^{۲} t\cos ۲t$ (با پریود ۲π) به صورت $\frac{a_o}{۲}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))$، داریم:

۱) $a_۴=-\frac{۱}{۴}$ و $a_۲=\frac{۱}{۲}$ و $a_o=-\frac{۱}{۴}$

۲) $a_۴=-\frac{۱}{۴}$ و $a_۲=\frac{۱}{۲}$ و $a_o=-\frac{۱}{۲}$

۳) $a_۴=۴$ و $a_۲=۲$ و $a_o=۴$

۴) $a_۴=۴$ و $a_۲=۲$ و $a_o=۸$

(۷۶۰۱) گزینه ۲:

$$T=۲l=۲\pi \quad , \quad \frac{\pi t}{l}=\frac{\pi t}{\pi}=t \quad , \quad f(t)=\sin^{۲} t\cos ۲t=\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲t)\cos ۲t=\frac{۱}{۲}\cos ۲t-\frac{۱}{۲}\cos^{۲} ۲t$$

$$f(t)=\frac{-۱}{۴}+\frac{۱}{۲}\cos ۲t-\frac{۱}{۴}\cos ۴t \Rightarrow \frac{a_o}{۲}=-\frac{۱}{۴}\rightarrow a_o=-\frac{۱}{۲}\ ,\ a_۲=\frac{۱}{۲}\ ,\ a_۴=-\frac{۱}{۴}$$

۳-۳) سری فوریه مختلط:

۳-۳-۱) سری فوریه مختلط اصلی:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \Rightarrow C_n=\frac{۱}{۲l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx$$

✓ برای تبدیل سری فوریه مختلط به سری فوریه حقیقی داریم:

$$\begin{cases} C_n=\dfrac{a_n-ib_n}{۲} \\ C_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{۲} \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} a_n=C_n+C_{-n} \\ b_n=i(C_n-C_{-n}) \end{cases}$$

۳-۴) انتگرال فوریه حقیقی:

اگر تابع $f(x)$ متناوب نباشد، داریم:

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_o^{\infty}[A(w)\cos(wx)+B(w)\sin(wx)]dw \Rightarrow \begin{cases} A(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(wx)dx \\ B(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(wx)dx \end{cases}$$

۳-۴-۱) انتگرال فوریه $f(x)$ زوج یا کسینوسی:

$$f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_o^{\infty}A(w)\cos(wx)dw \Rightarrow A(w)=۲\int_o^{\infty}f(x)\cos(wx)dx$$

مثال

(۷۰۱۱) انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ o & |x|>1\end{cases}$ برابر است با:

۱) $-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw$

۲) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi}\sin n\pi x$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos w\sin wx}{w}dw$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_{o}^{\infty}\frac{\cos wx\sin w}{w}dw$

(۷۰۱۱) گزینه ۴:

تابع $f(x)$ زوج (کسینوسی) است، لذا $B(w)=o$ و داریم:

$$A(w)=2\int_{o}^{\infty}f(x)\cos(wx)dx=2\int_{o}^{1}\cos(wx)dx=\frac{2\sin w}{w}\ ,\ f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}A(w)\cos(wx)dw$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{o}^{\infty}\frac{\cos wx.\sin w}{w}dw$$

مثال

(۷۹۰۷) در معادله انتگرالی $\int_{o}^{\infty}f(w)\cos(wx)dw=\begin{cases}1-x & o\le x\le 1\\ o & x>1\end{cases}$ ، تابع $f(w)$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos w}{w^2}\right)$

۲) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1+\cos w}{w^2}\right)$

۳) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos w-1}{w^2}\right)$

۴) $\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\sin w}{w}+\frac{1-\cos w}{w^2}\right)$

(۷۹۰۷) گزینه ۱:

$$q(x)=\begin{cases}1-x & o\le x\le 1\\ o & x>1\end{cases}\ ,\ f(w)=p(x)=\frac{2}{\pi}\int_{o}^{\infty}q(x)\cos(wx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{o}^{1}(1-x)\cos wx\,dx$$

$$f(w)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(1-x)\sin wx}{w}\right]_{o}^{1}+\frac{2}{\pi}\int_{o}^{1}\frac{\sin wx}{w}dx=-\frac{2}{\pi w^2}\left[\cos wx\right]_{o}^{1}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos w}{w^2}\right)$$

۳-۴-۲) *انتگرال فوریه $f(x)$ فرد یا سینوسی:*

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{o}^{\infty}B(w)\sin(wx)dw\Rightarrow B(w)=2\int_{o}^{\infty}f(x)\sin(wx)dx$$

✓ در تعدادی از مسائل معادلات انتگرالی، عبارتی به صورت $\int_{o}^{\infty}p(w)\sin(wx)dw=q(x)$ می‌دهند و عبارت $p(w)$ را می‌خواهند. برای اینکار از رابطه روبرو استفاده می‌کنیم: $p(w)=\frac{2}{\pi}\int_{o}^{\infty}q(x)\sin(wx)dx$

مثال

(۸۱۰۲) معادلـه انتگرالـی روبـرو را در نظـر مـی‌گیـریم: $\int_{o}^{\infty} f(w)\sin(wx)dw = \begin{cases} 1-x & o \le x \le 1 \\ o & x > 1 \end{cases}$ **، در اینصورت** $f(w)$ **برابر است با:**

۱) $\frac{2(w-\sin w)}{\pi w^2}$

۲) $\frac{2(w+\sin w)}{\pi w^2}$

۳) $\frac{2(w-2\cos w-\sin w)}{\pi w^2}$

۴) $\frac{2(2\cos w-w-\sin w)}{\pi w^2}$

(۸۱۰۲) گزینه ۱:

با توجه به رابطه انتگرال فوریه فرد یا سینوسی (در صورت سوال به جای $B(w)$ عبارت $f(w)$ آمده است) داریم :

$$q(x) = \begin{cases} 1-x & o \le x \le 1 \\ o & x > 1 \end{cases} \quad , \quad f(w) = p(w) = \frac{2}{\pi}\int_{o}^{\infty} q(x)\sin(wx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{o}^{1}(1-x)\sin(wx)dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[-(1-x)\frac{\cos wx}{w}\right]_{o}^{1} - \frac{2}{\pi w}\int_{o}^{1}\cos wx dx = \frac{2}{\pi w} - \frac{2}{\pi w^2}\sin w = \frac{2(w-\sin w)}{\pi w^2}$$

۳-۵) انتگرال فوریه مختلط (تبدیل فوریه):

$$.f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwx}dw \Rightarrow F(w) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

✓ در تبدیل انتگرال فوریه مختلط به حقیقی‌داریم:

$$\begin{cases} A(w)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(F(w)+F(-w)\right) \\ B(w)=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(F(w)-F(-w)\right) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} F(w)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(A(w)-iB(w)\right) \\ F(-w)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(A(w)+iB(w)\right) \end{cases}.$$

۳-۵-۱) *انتگرال فوریه مختلط $f(x)$ (زوج) یا کسینوسی (تبدیل فوریه (زوج) یا کسینوسی):*

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_o^\infty c(w)\cos(wx)dw \Rightarrow c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_o^\infty f(x)\cos(wx)dx$$

۳-۵-۲) *انتگرال فوریه مختلط $f(x)$ (فرد) یا سینوسی (تبدیل فوریه (فرد) یا سینوسی):*

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_o^\infty s(w)\sin(wx)dw \Rightarrow s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_o^\infty f(x)\sin(wx)dx$$

۳-۵-۳) *خواص مهم انتگرال فوریه:*

اگر $f(x)\xrightarrow{F}F(w)$ باشد، داریم:

a) $f(ax)\xrightarrow{F}\frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right)$

b) $f(x-a)\xrightarrow{F}e^{-iwa}F(w)$

c) $f'(x)\xrightarrow{F}iwF(w)$

d) $f^{(n)}(x)\xrightarrow{F}(iw)^n F(w)$

e) $xf(x)\xrightarrow{F}i\frac{d}{dw}F(w)$

f) $\frac{f(x)}{x}\xrightarrow{F}\int F(w)dw$

✓ دو رابطه e و f در بالا برای روابط تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی به صورت زیر در می‌آیند:

✓ $d\omega$(تبدیل فوریه کسینوسی $f(x)$) $\int$ = تبدیل فوریه سینوسی $\frac{f(x)}{x}$.

✓ $d\omega$(تبدیل فوریه سینوسی $f(x)$) $-\int$ = تبدیل فوریه کسینوسی $\frac{f(x)}{x}$.

✓ (تبدیل فوریه کسینوسی $f(x)$) $-\frac{d}{d\omega}$ = تبدیل فوریه سینوسی $xf(x)$.

✓ (تبدیل فوریه سینوسی $f(x)$) $\frac{d}{d\omega}$ = تبدیل فوریه کسینوسی $xf(x)$.

۴-۵-۳) چند انتگرال مهم:

a) $$\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{k^۲+w^۲}dw=\frac{\pi}{۲k}e^{-kx}\quad (k>0 \text{ و } x>0)$$

b) $$\int_0^\infty \frac{w\sin(wx)}{k^۲+w^۲}dw=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}e^{-kx} & k>0 \text{ و } x>0\\ -\frac{\pi}{۲}e^{kx} & k>0 \text{ و } x<0\end{cases}$$

مثال

(۷۵۱۱) مقدار عددی انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin^۲ x}{x^۲}dx$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

(۷۵۱۱) گزینه ۳:

$$\frac{۲}{\pi}\int_0^\infty \frac{۱-\cos x}{x^۲}dx=۱ \rightarrow \frac{۱}{۲\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right)}{\left(\frac{x}{۲}\right)^۲}dx=\frac{۱}{۲\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^۲ x}{x^۲}۴dx=۱ \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^۲ x}{x^۲}dx=\frac{\pi}{۲}$$

Thanks for your attention

Source : Dr.Razavi mathematical book

Student : F.Alaei