تبدیل لاپلاس:

تعریف: فرض کنید $f(t)$ یک تابع پیوسته تکه‌ای برای بازه $(0, \infty)$ باشد لاپلاس $f(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ و تابع $f(t)$ را تبدیل لاپلاس معکوس $F(s)$ می‌گوییم.

تبدیل لاپلاس برخی توابع مهم (a یک عدد ثابت و n یک عدد طبیعی می‌باشد)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{st} F(s)\, ds$$

	$f(t)$	$F(s)$	شروط
1	$f(t) = a$	$F(s) = \frac{a}{s}$	$s > 0$
2	$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{s-a}$	$s > a$
3	$f(t) = \cos at$	$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > a$
4	$f(t) = \sin at$	$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
5	$f(t) = \cosh at$	$F(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
6	$f(t) = \sinh at$	$F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
7	$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in N\,;\, s > 0$
8	$f(t) = t^a$	$F(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$a > -1;\, s > 0$
9	$f(t) = J_0(at)$	$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	
10	$f(t) = J_n(at)$	$F(s) = \frac{\left(\sqrt{s^2 + a^2} - s\right)^n}{a^n \sqrt{s^2 + a^2}}$	
11	$f(t) = u(t-a)$	$F(s) = \frac{e^{-as}}{s}$	
12	$f(t) = \delta(t-a)$	$F(s) = e^{-as}$	
13	$f(t) = \delta(t)$	$F(s) = 1$	
14	$f(t) = \frac{d\delta}{dt}$	$F(s) = 1$	

- تابع گاما:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx$$

تابع گاما همگرا است اگر و فقط اگر $a > 0$ باشد

همچنین داریم $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$; $\Gamma(a+1) = a!$; $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

و برای مثال:

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3 \times 2\, \Gamma(2) = 3 \times 2 \times 1\, \Gamma(1) = 3 \times 2 \times 1 = 3!$$

لاپلاس معکوس: در این بحث لاپلاس معکوس تابع گویایی که در قالب یک کسر نوشته و صورت و مخرج دو چند جمله‌ای s می‌باشد چند بخش خواهیم پرداخت تا بتوانیم با تجزیه کسر به کسرهای ساده‌تر به صورت مجموع کسرهای جزئی بنویسیم معمولاً این لاپلاس معکوس به کمک جدول L به سادگی صورت می‌گیرد

مثال ۱: لاپلاس معکوس تابع زیر را حساب نمایید؟

$$F(s)=\frac{3s+5}{s^2+2s-3}$$

$$F(s)=\frac{3s+5}{s^2+2s-3}=\frac{3s+5}{(s-1)(s+3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+3}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\B=1\end{cases}\quad F(s)=\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s+3}\xrightarrow[\text{معکوس}]{\text{لاپلاس}}f(t)=2e^{t}+e^{-3t}$$

نکته: در بسیاری از مواقع برای محاسبه انتگرال‌های ناسره‌ای به خصوص مسائلی که در قالب طیفی $\int_0^\infty$ بیان می‌شود استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس می‌تواند حل مسئله را بسیار ساده و آسان می‌کند

مثال ۲: انتگرال زیر را محاسبه نمایید.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}\qquad -\ln x=t\Rightarrow x=e^{-t}\xrightarrow{\text{مشتق}}dx=-e^{-t}dt$$

$$x=e^{-t}\begin{cases}x=0\Rightarrow t=\infty\\x=1\Rightarrow t=0\end{cases}\quad\text{داریم}\quad\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}=\int_0^\infty\frac{-e^{-t}}{\sqrt{t}}=L\left\{\frac{-1}{\sqrt{t}}\right\}\Big|_{s=1}=L\left\{-t^{-1/2}\right\}\Big|_{s=1}$$

$$=\frac{-\Gamma(1\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}\Big|_{s=1}=-\sqrt{\pi}$$

قضایای تبدیل لاپلاس:

- قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی:

قضیه مقدار نهایی $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

قضیه مقدار اولیه $\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

- قضیه تبدیل لاپلاس تابع متناوب:

فرض کنید تابع $f(t)$ برای t های مثبت تابعی متناوب با دوره تناوب P باشد در این صورت نشان دارد:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-Ps}}\int_0^P e^{-st}f(t)\,dt$$

مثال ۳: فرض کنید داشته باشیم $f(x+2\pi)=f(x)$, $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le\pi\\ -\sin x & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$ تبدیل لاپلاس این تابع را حساب کنید؟

چون f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است پس:

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi}e^{-st}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\int_0^{\pi}e^{-st}(0)\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{-st}(-\sin t)\,dt\right]=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_{\pi}^{2\pi}-\sin t\,e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{e^{\pi s}(e^{-\pi s}+1)}{(1-e^{-\pi s})(1+e^{-\pi s})(1+s^2)}=\frac{e^{-\pi s}}{(1+s^2)(e^{-\pi s}-1)}$$

- قضیه تبدیل لاپلاس مشتقات یک تابع:

$$L(f^{n}(t)) = s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - s f^{n-1}(0) - f^{n-1}(0)$$

مثلاً $L(f'''(t)) = s^{3}F(s) - s^{2}f(0) - sf'(0) - f''(0)$

و نیز می‌توان نوشت:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$f'(0) = \lim_{s\to\infty} s^{2}F(s) - sf(0)$$

$$f''(0) = \lim_{s\to\infty} s^{3}F(s) - s^{2}f(0) - sf'(0)$$

$$\vdots$$

مثال: فرض کنید $L\{\cos\sqrt{t}\} = F(s)$ مطلوبست محاسبه $L\left\{\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$:

$$f(0) = 1 \;;\; (\cos\sqrt{t})' = \frac{-\sin\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$$

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \Rightarrow -\tfrac{1}{2}L\left\{\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = sF(s) - 1 \Rightarrow L\left\{\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = 2 - 2sF(s)$$

- قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال یک تابع:

$$L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

و در فرم معکوس $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(u)\,du$

مثال: لاپلاس معکوس تابع زیر را بنویسید؟

$$F(s) = \frac{1}{4s^{3}+s} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s(4s^{2}+1)} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s(4s^{2}+1)}\right\} =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}(-2)\cos\frac{t}{2}\Big|_0^t = 1 - \cos\frac{t}{2}$$

- قضیه اول انتقال:

$$L\{e^{at}f(t)\} = F(s)\Big|_{s\to s-a} = F(s-a)$$ و در فرم معکوس داریم:

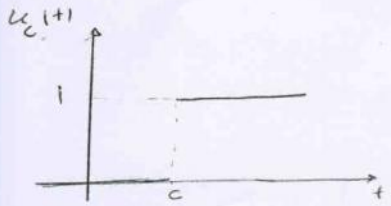
$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

مثال: لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید؟

$$F(s) = \frac{2s+5}{s^{2}+s+3} \rightarrow F(s) = \frac{2s+5}{s^{2}+s+3} = \frac{2(s+\frac{1}{2})+1}{(s+\frac{1}{2})^{2}+\frac{11}{4}} + \frac{4}{(s+\frac{1}{2})^{2}+\frac{11}{4}}$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\sqrt{\frac{11}{4}}\,t + 4\,\frac{1}{\sqrt{\frac{11}{4}}}\,e^{-\frac{1}{2}t}\sin\sqrt{\frac{11}{4}}\,t$$

نکته: همان گونه که می‌دانیم تابع پله واحد بصورت زیر تعریف می‌شود.



$$u_c(t) = u_0(t-c) = \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t>c \end{cases}$$

و می‌توان نوشت:

$$L\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}$$

- قضیه دوم انتقال: $L\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-cs} F(s)$ (۱) و در نتیجه معکوس داریم:

$$L^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} = u_c(t) f(t-c)$$

$$L\{u_c(t) f(t)\} = e^{-cs} L\{f(t+c)\} \quad (۲)$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید:

$$f(t) = u_3(t)(4t+1)$$

برای حل از فرمول دوم استفاده می‌کنیم $F(s) = e^{-3s} L\{f(t+3)\} = e^{-3s} L\{4(t+3)+1\} \Rightarrow F(s) = e^{-3s} L\{4t+13\}$

$$F(s) = e^{-3s}\left(\frac{4}{s^2} + \frac{13}{s}\right)$$

- قضیه مشتق گیری از تبدیل لاپلاس:

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

برای مثال $L\{t f(t)\} = -F'(s)$ و در نتیجه معکوس آن داریم: $L^{-1}\{F'(s)\} = -t f(t)$

نکته: تبدیل لاپلاس معکوس عبارت است از تبدیل لاپلاس آن در جدول ذکر شده بنابراین شامل Ln و معکوس‌های مثلثاتی و هیپربولیک

از رابطه روبرو استفاده می‌کنیم.

$$L^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t} L^{-1}\{F'(s)\}$$

- قضیه انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس:

$$L\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^{+\infty} F(s)\, ds$$

مثال: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید

1) $f(t) = t^2 e^{-t} \int_0^t e^{2t} \sin 5t \, dt$

$$L\{\sin 5t\} = \frac{5}{s^2+25} \Rightarrow L\{e^{2t}\sin 5t\} = \left.\frac{5}{s^2+25}\right|_{s\to s-2} = \frac{5}{(s-2)^2+25}$$

$$L\left\{\int_0^t e^{2t}\sin 5t\, dt\right\} = \frac{1}{s}\left(\frac{5}{(s-2)^2+25}\right)$$

$$L\left\{e^{-t}\int_0^t e^{2t}\sin 5t\, dt\right\} = \left.\frac{1}{s}\left(\frac{5}{(s-2)^2+25}\right)\right|_{s\to s+1} = \frac{1}{s+1}\,\frac{5}{(s-1)^2+25} = \frac{5}{s^3-s^2+24s+26}$$

$$L\left\{t^2 e^{-t}\int_0^t e^{2t}\sin 5t\, dt\right\} = \left(\frac{5}{s^3-s^2+24s+26}\right)'' = \dots$$

2) $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t}$

$$L\{\sin^2 t\} = L\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2} L\{1-\cos 2t\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$L\left\{\frac{1}{t}\sin^2 t\right\} = \int_s^{\infty} f(s)\, ds = \frac{1}{2}\int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) = \left.\frac{1}{2}\,\frac{\ln s}{(s^2+4)^{\frac{1}{2}}}\right|_s^{\infty} = \frac{1}{2}\ln t - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

$$F(s) = -\frac{1}{2}\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

۳) $\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0)=0 \;;\; y'(0)=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{لاپلاس}} (-1)^1\{(s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0))'\} + \{s Y(s) - y(0)\} + \{(-1)^1 Y'(s)\} =$

$\Rightarrow -\{s^2 Y(s) - 1)'\} + s Y(s) - \{(Y(s))'\} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2sY(s) - s^2 Y'(s) + sY(s) - Y'(s) = 0 \Rightarrow -(s^2+1)Y'(s) = sY(s) \xrightarrow{\text{جدا کردن متغیرها}}$

$\Rightarrow \frac{dY}{Y} = -\frac{s}{s^2+1}ds \rightarrow \ln Y = -\frac{1}{2}\ln(s^2+1) + \ln k \Rightarrow Y(s) = \frac{k}{\sqrt{s^2+1}}$

- قضیه تبدیل لاپلاس پیچش دو تابع:

$(f*g)(t) = \int_0^t f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda = \int_0^t f(t-\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda$

بنابراین اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ و $L\{g(t)\} = G(s)$ باشد داریم:

$L\{(f*g)(t)\} = F(s)\,G(s)$

و برعکس داریم:

$L^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = (f*g)(t)$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید: $f(t) = \int_0^t (\sin\lambda - \cos 2\lambda)(t-\lambda)^3 d\lambda \Rightarrow f(t) = (\sin t - \cos 2t) * t^3$

$F(s) = L\{\sin t - \cos 2t\}\, L(t^3) = \left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+4}\right)\left(\frac{3!}{s^4}\right)$

- تابع دلتای دیراک: $\delta_a(t) = \delta(t-a) = \begin{cases} 0 & t \neq a \\ \infty & t = a \end{cases}$

برای تابع دلتا دیراک داریم: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t) = 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta_a(t)\,dt = f(a)$

و برای تبدیل لاپلاس تابع دلتا دیراک داریم:

$L\{\delta_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta_a(t)\,dt = e^{-sa}$

مثال: تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \delta_2(t)\cos t \\ y(0) = 1 \;;\; y'(0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{لاپلاس}}$

$\Rightarrow (s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)) - 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta_2(t)\cos t\, dt \Rightarrow$

$(s^2 - 3s + 2)\,Y(s) = e^{-2s}\cos 2 + s - 3 \Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-2s}\cos 2 + s - 3}{s^2 - 3s + 2}$