فصل ۱

ماتریسها

۱-۱ ماتریسها

۱. تعریف ماتریس

۲. دترمینان- معکوس ماتریس

۳. محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۱-۱-۱ تعریف ماتریس

همانطوریکه می دانیم جدولی از اعداد یا اعداد مختلط و یا توابع بصورت زیر را یک ماتریس گویند. (این عناصر a_{ij} میتوانند اعداد حقیقی یا مختلط باشند و یا توابع)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{سطر } m \quad \text{ستون } n \qquad (۱-۱)$$

۱-۱-۲ عملیات جبری روی ماتریسها

اگر دو ماتریس A, B هم بعد باشند (تعداد سطرها- ستونها این دو ماتریس با هم برابر باشند) در آن صورت

$$A \mp B = \lfloor a_{ij} \mp b_{ij} \rfloor_{m*n} \qquad (۱-۲)$$

۱-۱-۳ تعریف برابری

دو ماتریس m*n، A و B را برابر گویند هرگاه

$$a_{ij}=b_{ij} \text{ for each i and j} \qquad (۱-۳)$$

۱-۱-٤ ضرب اسکالر یک ماتریس

هر گاه k عدد حقیقی باشد، آنگاه ضرب اسکالر در ماتریس برابر

$$kA = \lfloor ka_{ij} \rfloor_{m*n} \qquad (۱-٤)$$

۱-۱-۵ ضرب ماتریسها:

اگر دو ماتریس A=(m*n) , B=n*l باشند آنگاه ضرب دو ماتریس برابر

$$A.B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{mxl} \qquad i=۱\ldots m,\ j=۱\ldots l \qquad (۱-۵)$$

۱-۱-٦ ترانسپوزه

ترانسپوز یک ماتریس A_{m*n} برابر ماتریس A^T_{n*m} میباشد.

قضایای ترانسپوز:

$$\begin{aligned} &i)(A^T)^T = A, \\ &ii)(A+B)^T = A^T + B^T \textit{Transpose of a sum} \\ &v)(ABC)^T = C^T B^T A^T \\ &iii)(AB)^T = B^T A^T \textit{Transpose of a product} \end{aligned} \qquad (۱-٦)$$

۱-۱-۷ دترمینان ماتریس مربعی ۳*۳

دترمینان یک ماتریس $[A]_{۳*۳}$ برابر

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (۱-۷)$$

حاصل دترمینان بالا به شکل زیر نیز می تواند آرایش داده شود.

$$\det A = a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13} \qquad (۱-۸)$$

که در آن $C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

(دترمینان ماتریس ۲*۲ که از دو طرف سطر i ام و ستون j ام بدست می آید.)

لذا کوفاکتور ماتریس ۳*۳ را برای عنصر a_{ij} بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\text{Cofactor}\,(a_{ij}) = C_{ij} = (-۱)^{i+j} \qquad (۱-۹)$$

بنابراین یک ماتریس (۳*۳) دارای ۹ کوفاکتور می باشد.

برای ماتریس (٤*٤) نتیجتاً می توانیم کوفاکتور تعریف نماییم. کوفاکتور ماتریس (٤*٤) در حقیقت دترمینان ماتریس (۳*۳) خواهد بود بنابراین برای یک ماتریس ٤*٤ دارای ١٦ کوفاکتور خواهیم بود. اگر یک سطر یا ستون را بطور دلخواه انتخاب کنیم. عناصر آن سطر یا ستون را در کوفاکتورهای نظیرش ضرب و جمع نماییم دترمینان یک ماتریس (٤*٤) بدست می آید.

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + a_{i4}C_{i4} \qquad i = 1, \ldots, 4$$

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + a_{4j}C_{4j}$$

نتیجتاً بطور عمومی می توانیم یک ماتریس (n*n) کوفاکتورهای یک ماتریس را تعریف کنیم. بنابراین یک ماتریس (n*n) دارای $n^۲$ کوفاکتور خواهد بود. آن وقت جهت محاسبه دترمینان A یک سطر یا یک ستون را بطور دلخواه انتخاب کرده عناصر آن سطر یا ستون را در کوفاکتورهای نظیر ضرب کرده یا جمع می کنیم:

$$\det A = a_{i1}\, C_{i1} + a_{i2}\, C_{i2} + \ldots + a_{in}\, C_{in} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\det A = a_{1j}\, C_{1j} + a_{2j}\, C_{2j} + \ldots + a_{nj}\, C_{nj} \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱-۱۰)$$

۸-۱-۱ خواص دترمینان ها:

۱) اگر A^T ترانسپوز ماتریس A باشد آنگاه $\det A^T = \det A$

۲) هرگاه دو سطر (یا ستون) ماتریس A برابر و یا معادل باشند آنگاه $\det A = ۰$

۳) هرگاه تمام المانهای یک سطر یا ستون برابر صفر باشد آنگاه $\det A = ۰$

٤) اگر B ماتریسی باشد که از جابجایی دو سطر یا ستون ماتریس A بدست آیند آنگاه

$\det B = -\det A$

٥) فرض کنید B ماتریسی باشد که از ضرب ماتریس A در یک عدد حقیقی غیر صفر k در یک سطر یا ستون آن آنگاه

$\det B = k.\det A$

٦) هرگاه A, B دو ماتریس n*n باشند آنگاه $\det A\,B = \det A \det B$

۷) فرض کنید A یک ماتریس مثلثی n*n (بالا یا پایین) باشد آنگاه $\det A = a_{۱۱}a_{۲۲}\ldots a_{nn}$

۹-۱-۱ معکوس ماتریس:

اگر A یک ماتریس n*n باشد و non-singular و $\det A \neq 0$ باشد، آنگاه

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right) adj\ A \qquad (۱-۱۱)$$

برای ماتریس ۳*۳ داریم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \Rightarrow C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

در هر صورت با بدست آوردن معکوس یک ماتریس یک دستگاه n معادله و n مجهول را می توانیم حل کنیم. بعبارت دیگر یک دستگاه n معادله و n مجهول

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \Rightarrow Ax = B \Rightarrow x = A^{-1}B \qquad (۱-۱۲)$$

از این معادله نتیجه میگیریم شرط وجود جواب آن است که A^{-1} موجود باشد، برای آنکه A^{-1} موجود باشد می بایستی $\det A \neq 0$ باشد که این شرط یک شرط لازم و کافی است.

۱۰-۱-۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه:

از لحاظ کاربردهای مهندسی، مسائل مقدار (تنش، کرنش و ممان اینرسی و ارتعاشات و قطری کردن) ویژه از جمله مهمترین مسائل مربوط به ماتریسها هستند.

فرض کنید $A=(a_{jk})$ یک ماتریس مربعی n سطر می باشد و معادلهٔ برداری

$$Ax = \lambda x \qquad (۱-۱۳)$$

را، که در آن λ یک عدد اسکالر است، در نظر بگیرید. مقداری از λ را که به ازای آن (۱-۱۳) دارای جوابی مانند $x \neq 0$ باشد مقدار ویژه یا مقدار مشخصه ماتریس A می گویند و بردار x بردار ویژه A متناظر با این مقدار ویژه می باشد.

مثال ۱-۱: دستگاه مرتعش: با نوشتن معادلات دینامیکی برای یک سیم مرتعش، اگر y را جابجایی عمودی یک نقطه از سیم در نظر بگیریم دستگاه معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -3y_1 + 2(y_2 - y_1) \\ \ddot{y}_2 = -2(y_2 - y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 = -5y_1 + 2y_2 \\ \ddot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

که در آن

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

برای حل این معادله

$$y = x\, e^{wt}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 X e^{wt} = A x e^{wt} \Rightarrow Ax = \lambda x \qquad (\lambda = w^2)$$

مثال ۲-۱: تبدیل خطی: تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید: $y = Ax$

می خواهیم برداری مانند X را به قسمی پیدا کنیم که $y = AX = \lambda X$

می توان نشان داد که هر ماتریس مربعی n سطری حداقل یک و حداکثر n مقدار ویژه متمایز دارد.

طبق تعریف بردارهای خاص ماتریس A_{n*n} برداری است مانند V بطوریکه داشته باشیم

$$AV = \lambda V$$

مقدار خاص بردار خاص

همانطوریکه از رابطه بالا مشاهده میگردد، اگر مختصات بردار V را $V = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ بنامیم از رابطه فوق نتیجه می گردد که:

$$(A - \lambda I)V = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (۱-۱٤)$$

همانطوریکه مشاهده می گردد یک دستگاه n معادله و n مجهولی که طرف دوم صفر است دارا می‌باشیم، که اگر بخواهیم جواب این دستگاه معادلات را بدست آوریم خواهیم داشت:

که در این خود نتیجه می دهد اگر بخواهیم برای X جواب غیر از صفر بدست آوریم میبایستی

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

از این رابطه یک چند جمله‌ای بدست خواهیم آورد که آن را چندجمله‌ای مشخصه می نامیم.

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + P_1\lambda^{n-1} + ... + P_n = \det(A - \lambda I) \quad (۱-۱۵)$$

اگر $P_n(\lambda)$ دارای n ریشه $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ باشد، متناظر با هر یک از λ_i، υ_i بردار خاص بدست می آوریم. بطوریکه

$$A\upsilon_i = \lambda_i \upsilon_i$$

قبل از آنکه روشهای بدست آوردن λ_i، υ_i ارائه دهیم به مثال زیر توجه می کنیم.

مثال۳-۱: مطلوبست محاسبه چندجمله‌ای مشخصه، مقادیر خاص و بردارهای خاص

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow P_2(\lambda)=\det\,(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}2-\lambda & 1\\ 3 & 4-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^2-6\lambda+5=0. \qquad \Rightarrow \quad \lambda_2=5,\quad \lambda_1=1$$ مقادیر خاص

برای مقدار ویژه λ_1 داریم:

$$V=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \Rightarrow AV_1=\lambda_1 V_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}2x+y=x\\ 3x+4y=y\end{matrix}\Rightarrow V_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

حل دستگاه بی نهایت جواب دارد. برای داشتن یک جواب خاص V را نرمالیزه می کنیم تا V_1 بدست آید. برای مقدار ویژه λ_2 نیز خواهیم داشت:

$$AV_2=\lambda_2 V_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x\\ 5y\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}3x-y=0\\ 3x-y=0\end{matrix}\Rightarrow \Big|^{y=3x} \Rightarrow V_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{10}\\ 3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$$

ماتریس خاص $P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{10}\\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$ از کنار هم قرار دادن V_1 و V_2 بدست می‌آید.

در جبر خطی ثابت می گردد که با ماتریس P می‌توان A را قطری کرد؛ یعنی:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix} \qquad ; \qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

A را بدست آورید

۱۱-۱-۱ حل سیستم معادلات دیفرانسیل خطی:

۱) مقادیر ویژه حقیقی

$X' = AX \qquad (۱)$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A یک سیستم همگن

$V_1, V_2, \ldots, V_n$ بردارهای ویژه آن میباشند. حل عمومی (۱) از رابطه زیر پیدا میشود.

$$X = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n V_n e^{\lambda_n t} \qquad (۱-۱۶)$$

مثال ٤-۱: دستگاه روبرو را حل کنید:

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

حل: در ابتدا مقادیر و بردارهای ویژه A را پیدا می کنیم.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

برای $\lambda_1 = 1 \Rightarrow A - \lambda_1 I$ is equivalent to $\begin{cases} 3\upsilon_1 + 3\upsilon_2 = 0 \\ 2\upsilon_1 + 2\upsilon_2 = 0 \end{cases}$

بنابراین $\Rightarrow \upsilon_1 = -\upsilon_2$. We select $\upsilon_2 = -1 \Rightarrow V_1 = [1 \quad -1]^T$

برای $\lambda_2 = 4 \Rightarrow A - \lambda_2 I$ is equivalent to $\begin{cases} -2\upsilon_1 + 3\upsilon_2 = 0 \\ 2\upsilon_1 - 3\upsilon_2 = 0 \end{cases}$

به این ترتیب $\upsilon_1 = 3\upsilon_2/2 \Rightarrow if\ \upsilon_2 = 2 \Rightarrow V_2 = [3 \quad 2]^T$

$$\Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}, X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t} \Rightarrow X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \\ -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \end{bmatrix}$$

۲) مقادیر ویژه موهومی

a) اگر $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ باشند. بردار ویژه V_1 نیز موهومی خواهند بود. حل چنین سیستم معادلات خطی $(X' = AX)$ برابر

$$X_1 = V_1 e^{\lambda_1 t}, X_2 = \bar{V}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} \qquad (x' = Ax) \qquad (۱-۱۷)$$

مثال۵-۱: معادلهٔ دیفرانسیل خطی روبرو را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}$$

حل: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5 + 2i, \lambda_2 = 5 - 2i$

$$\lambda_1 = 5+2i \xrightarrow{(A-\lambda_1 I)V=0} (A - \lambda_1 I)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1-2i)v_1 - v_2 = 0 \\ 5v_1 - (1+2i)v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{For } v_1 = 1 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5 - 2i \xrightarrow{(A-\lambda_{12} I)V=0} V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}$$

در نتیجه $x_1 = [1 \quad 1-2i]^T e^{(5+2i)t}$, $x_2 = [1 \quad 1+2i]^T e^{(5-2i)t}$

الف) $\Rightarrow X = c_1[1 \quad 1-2i]e^{(5+2i)t} + c_2[1 \quad 1+2i]e^{(5-2i)t}$ با استفاده از جمع آثار ملاحظه می گردد که مقادیر و بردارهای ویژه موهومی و مزدوج هم می باشند:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \quad , \quad V_2 = \bar{V}_1$$

بازنویسی $(I) \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^{(5+2i)t} + c_2 e^{(5-2i)t} \\ y = c_1(1-2i)e^{(5+2i)t} + c_2(1+2i)e^{(5-2i)t} \end{cases}$

با بکار گیری فرمول اویلر: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix} e^{5t}$

ب) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ مقادیر ویژه ماتریس A در سیستم $x' = Ax$ باشد آنگاه حل چنین سیستم برابر

$$X_1 = (B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t)e^{\alpha t}$$
$$X_2 = (B_2 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t)e^{\alpha t}$$

که در آن

$$B_1 = \frac{1}{2}\left[V_1 + \bar{V}_1\right] = \mathrm{Re}(V_1) \quad ; \quad B_2 = \frac{1}{2}\left[-V_1 + \bar{V}_1\right] = \mathrm{Im}(V_1)$$

۱۲-۱-۱ قطری کردن یک ماتریس

برای یک ماتریس $A_{(n*n)}$، ماتریس P (nonsingular) را می توان پیدا کرد که حاصل $P^{-1}AP=D$ یک ماتریس قطری گردد. در حالت کلی ضرب دو ماتریس n*n را میتوان به شکل زیر تعریف کرد.

$$AB = A[X_1 X_2 \ldots\ldots X_n] = [AX_1 AX_2 \ldots\ldots AX_n] \qquad (۱-۱۸)$$

که در آن $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ ستونهای B است. بنابراین اگر P۱, P۲, P۳ ستونهای P را نمایش دهند و ماتریس قطری D به صورت

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \qquad (۱-۱۹)$$

باشد حاصل AP=PD برابر است با $[AP_1\ AP_2\ AP_3]=[d_{11}P_1\ d_{22}P_2\ d_{33}P_3]$

و یا

$$AP_1=d_{11}P_1, AP_2=d_{22}P_2, AP_3=d_{33}P_3 \qquad (۱-۲۰)$$

قضیه: هرگاه ماتریس A_{n*n} دارای n بردار ویژه مستقل به ترتیب $V_1, V_2, \ldots, V_n$ باشد آنگاه A قطری پذیر است.

مثال۱-۶: ماتریس زیر را قطری کنید:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} -5-\lambda & 9 \\ -6 & 10-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \Rightarrow V_1 = [3 \quad 2]^T$$

$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow V_2 = [1 \quad 1]^T$$

$$P = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = D$$

اگر معکوس گردد $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

تمرین۷-۱ :

الف) مشخص کنید که آیا ماتریس A قطری پذیر است یا نه. در صورت مثبت بودن جواب ماتریس های P و D را چنان تعیین کنید که $D=P^{-1}AP$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 6 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

حل : $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 6 & 2 & 3\\ -13 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

۱-۲ مشتقات بردارها و ماتریسها و توابع آنها

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in R^n \qquad (۱-۲۱)$$

$$X^T=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \qquad (۱-۲۲)$$

فرض کنید Y تابعی از X باشد.

$$Y=Y(X)=\begin{pmatrix}y_1(X)\\ y_2(X)\\ \vdots\\ y_m(X)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ y_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ \vdots\\ y_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{pmatrix} \qquad (۱-۲۳)$$

مشتق Y نسبت به X

$$\frac{\partial Y}{\partial X}=\begin{pmatrix}\partial y_1/\partial X\\ \partial y_2/\partial X\\ \vdots\\ \partial y_m/\partial X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 & \cdots & \partial y_1/\partial x_n\\ \partial y_2/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_2 & \cdots & \partial y_2/\partial x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial y_m/\partial x_1 & \partial y_m/\partial x_2 & \cdots & \partial y_m/\partial x_n\end{pmatrix}\in R^{m*n} \qquad (۱-۲۴)$$

در حالیکه m=۱ باشد.

$$\frac{\partial y}{\partial X}=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial y}{\partial x_n}\right) \qquad (۱-۲۵)$$

اگر المانهای X توابعی از پارامتر t باشند، مشتق Y نسبت به t برابر:

$$\frac{dY}{dt}=\begin{pmatrix} dy_1/dt \\ dy_2/dt \\ \vdots \\ dy_m/dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \partial y_1/\partial x_1\ dx_1/dt+\partial y_1/\partial x_2\ dx_2/dt+\ldots+\partial y_1/\partial x_n\ dx_n/dt \\ \partial y_2/\partial x_1\ dx_1/dt+\partial y_2/\partial x_2\ dx_2/dt+\ldots+\partial y_2/\partial x_n\ dx_n/dt \\ \vdots \\ \partial y_m/\partial x_1\ dx_1/dt+\partial y_m/\partial x_2\ dx_2/dt+\ldots+\partial y_m/\partial x_n\ dx_n/dt \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 & \cdots & \partial y_1/\partial x_n \\ \partial y_2/\partial x_1 & \partial y_2/\partial x_2 & \cdots & \partial y_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial y_m/\partial x_1 & \partial y_m/\partial x_2 & \cdots & \partial y_m/\partial x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix}=\frac{\partial Y}{\partial X}\frac{dX}{dt} \qquad (۱-۲۶)$$

۱-۲-۱ مشتقات ماتریسها

وقتیکه A یک تابعی از X و

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}\in R^{l*m}$$

که در آن :

$$X=X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad ; \quad a_{ij}=a_{ij}(X)=a_{ij}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

مشتق A نسبت به t

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial A}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial A}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \qquad (۱-۲۷)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}=\begin{pmatrix} \partial a_{11}/\partial x_i & \partial a_{12}/\partial x_i & \cdots & \partial a_{1m}/\partial x_i \\ \partial a_{21}/\partial x_i & \partial a_{22}/\partial x_i & \cdots & \partial a_{2m}/\partial x_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial a_{l1}/\partial x_i & \partial a_{l2}/\partial x_i & \cdots & \partial a_{lm}/\partial x_i \end{pmatrix} \qquad (۱-۲۸)$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial X}\frac{dX}{dt} \qquad (۱-۲۹)$$

۱-۳ تانسورها:

در نگاشت اسکالرها توسط توابع داریم :

$$x \rightarrow y(x), \qquad \Delta y = y'.\Delta x \tag{۱-۳۳}$$

یعنی تغییرات تابع y در اثر تغییرات x را می‌توان توسط y' بدست آورد. اکنون همین موضوع را در مورد نگاشت بردارها بررسی می نماییم. برای نگاشت میدان برداری $\vec{r}$ توسط تابع برداری $\vec{s}(\vec{r})$ به طریق مشابه می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{s}(r), \qquad \Delta\vec{s} = A.\Delta\vec{r} \tag{۱-۳٤}$$

در اینجا A چیست؟ A نمی‌تواند یک عدد اسکالر باشد، زیرا ضرب یک اسکالر در یک بردار، برداری در همان جهت ارائه می‌دهد و این نمی‌تواند برای هر تابع دلخواه s درست باشد. همچنین A نمی‌تواند یک بردار باشد زیرا از ضرب دو بردار یک عدد اسکالر حاصل می‌گردد نه یک بردار. بنابراین A ماهیت دیگری دارد که آنرا تانسور می‌نامند. به عبارت دیگر تانسور بیانگر یک تبدیل خطی از یک فضای برداری به فضای برداری دیگر می‌باشد. تانسورها توسط ماتریسها نمایش داده می‌شوند؛ به

عبارت دیگر تانسورها زیردسته‌ای از ماتریسها هستند که ارتباط بین دو فضای برداری را توصیف می‌کنند.

عملیات ریاضی برروی تانسورها به شرح زیر می‌باشد:

- ضرب تانسور در بردار:

  طبق تعریف ضرب تانسور در بردار، بردار دیگری را نتیجه می‌دهد. این ضرب بصورت ضرب ماتریس در بردار می‌باشد.

- ضرب اسکالر در تانسور:

  ضرب اسکالر در تانسور را در اصطلاح گسترش ایزوتروپیک[1] می‌گویند، زیرا باعث تغییر اندازه تمامی بردارها به یک اندازه می‌شود.

$$(\lambda\hat{A})\mathbf{x} = \lambda\hat{A}\mathbf{x} = \hat{A}\lambda\mathbf{x} \qquad (۱-۳۵)$$

- جمع و تفریق :

$$(\hat{A} \pm \hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{B}\mathbf{x} \qquad (۱-۳۶)$$

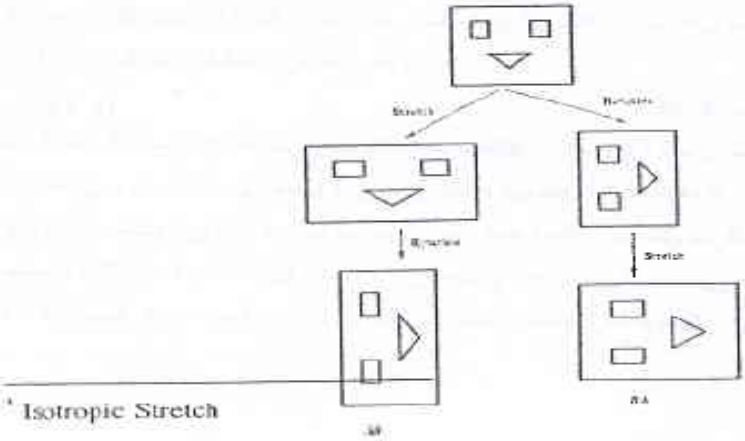
۱-۳-۱ ضرب تانسورها:

$$\hat{A}\mathbf{r} = \mathbf{s} \ , \quad \hat{B}\mathbf{s} = \mathbf{t} \Rightarrow \hat{B}\hat{A}\mathbf{r} = \mathbf{t} \qquad (۱-۳۷)$$

به ترتیب تانسورهای A و B توجه کنید.

- تمامی قوانین معمولی جبری برای تانسورها هم صادق هستند، به جز جابجایی پذیری:

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A} \qquad (۱-۳۸)$$



(۱-۲۹)

[۱] Isotropic Stretch

همانطور که گفته شد تانسورها بیانگر تبدیلات خطی بین فضاهای برداری هستند. اگر فرض کنیم بردارهای r و s در فضاهای ۳ بعدی تعریف شده باشند، برای نشان دادن یک تانسور داریم:

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \ , \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 \\ s_2 = a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3 \\ s_3 = a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3 \end{cases} \qquad (۱-۴۰)$$

بنابراین تانسور را می‌توانیم توسط یک ماتریس نشان دهیم :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (۱-۴۱)$$

معمولا برای سادگی مثلا به جای "ماتریس بیانگر تانسور دوران" فقط گفته می‌شود "ماتریس دوران".

۱-٤ مفاهیم اولیه:

به منظور فرموله کردن سیستم ها ، بررسی مفاهیم و روشهای ریاضی مورد نیاز ضروری بنظر میرسد.

۱-٤-۱ تعریف مختصات:

اگر بردار P و $x=\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ محورهای قائم در فضای R^n باشد و مختصات P نسبت به x را بصورت $[P]^x$ نمایش دهند، داریم

$$P = \sum_{k=1}^{n} [P]_k^x \, x^k \qquad (۱-٤۲)$$

بردار موقعیت در دستگاه متحرک $[P]^m = [P.m^1, P.m^2, P.m^3]^T$

بردار موقعیت در دستگاه ثابت $[P]^F = [P.f^1, P.f^2, P.f^3]^T$

۱-٤-۲ تغییر حالت مختصات:

اگر $F=\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ و $M=\{m^1, m^2, \ldots, m^n\}$ قابهای مختصات در فضای R^n و A ماتریس n×n، بصورت $A_{kj}=f^k.m^j$ $1 \le k, j \le n$ تعریف شوند، آنگاه برای هر نقطهٔ P در فضای R^n داریم

$$[P]^F = A[P]^m \qquad (۱-٤۳)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} f^1.m^1 & f^1.m^2 & f^1.m^3 \\ f^2.m^1 & f^2.m^2 & f^2.m^3 \\ f^3.m^1 & f^3.m^2 & f^3.m^3 \end{bmatrix} \qquad (۱-٤٤)$$

۱-٤-۳ ماتریس دوران:

اگر قاب مختصات متحرک M حول یکی از بردارهای واحد قاب مختصات ثابت F دوران نماید، آنگاه نتیجه ماتریس تبدیل را ماتریس دوران گویند.

$$R_1(\phi) = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f^2.m^2 & f^2.m^3 \\ 0 & f^3.m^2 & f^3.m^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$ حول f^1

$$R_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ حول f^3 و $$R_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$ حول f^2 (۱-٤٥)

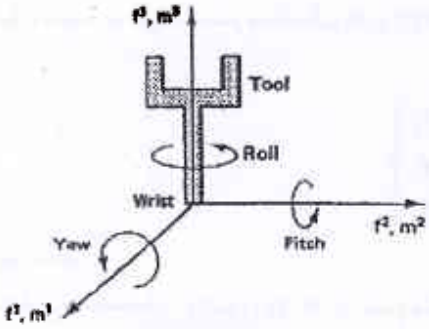
۱-٤-٤ دورانهای مرکب:

حاصلضرب چند ماتریس دوران در هم معرف دورانهای متوالی حول بردار واحد است و به آن دورانهای مرکب گویند. توسط دورانهای مرکب، جهت گیری دلخواه دست بازوی مکانیکی امکان پذیر میشود.

قضیه ۱-٤-۱: تغییر حالت (تبدیل) گردش Y و پیچش P، چرخش R (YPR):

$$YPR(\phi) = R_3(\phi_3) R_2(\phi_2) R_1(\phi_1) \qquad (۱-٤٦)$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2c_3 & s_1s_2c_3 - c_1s_3 & c_1s_2c_3 + s_1s_3 \\ c_2c_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 \\ -s_2 & s_1c_2 & c_1c_2 \end{bmatrix}$$



۱-۵ مقدمات ریاضی

۱-۵-۱ موقعیت و جهت یک جسم صلب

مطابق شکل ۳-۱ موقعیت جسم صلب نسبت به این سیستم مختصات ثابت O-xyz به صورت زیر بیان می‌شود:

$$X_o = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} \qquad (۱-۵۰)$$

که در آن X_0 یک بردار ۳×۱ ستونی است.

برای بیان جهت جسم صلب، از سه محور مختصات z_b, y_b, x_b که به جسم صلب متصلند، استفاده می‌شود.

$$R = [n\ ,\ t\ ,\ b] \qquad (۱-۵۱)$$

ماتریس R جهت جسم صلب را بطور کامل و با توجه به مرجع مختصات ثابت O-xyz بیان می‌کند.

توجه داشته باشید که بردارهای ستونی ماتریس R دو به دو بر هم عمودند:

$$n^T t = 0, t^T b = 0, b^T n = 0 \qquad (۱-۵۲)$$

و همچنین دارای طول واحدند:

$$|n| = 1\ ,\ |t| = 0\ ,\ |b| = 1 \qquad (۱-۵۳)$$

۲-۵-۱ تبدیلات مختصات

مختصات نقطهٔ P را با توجه به مختصات ثابت O-xyz به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (۱-۵۴)$$

همچنین موقعیت نقطهٔ P را با توجه به سیستم مختصات متصل به جسم صلب، $O' - x_b y_b z_b$، با رابطهٔ زیر نشان می‌دهیم:

$$X^b = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \qquad (۱-۵۵)$$

از طریق نقاط B, A, O' می‌توان به نقطهٔ P رسید.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \qquad (۱-۵۶)$$

که در آن $\overrightarrow{OP} = X$ و $\overrightarrow{OO'} = X_o$ است. می‌توانیم عبارت فوق را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$X = X_o + un + vt + wb \qquad (۱-۵۷)$$

که از روابط (۱-۵۷) و (۱-۵۵) نیز نتیجه می‌شود:

$$X = X_o + RX^b \qquad (۱-۵۸)$$

طرفین معادلهٔ (۱-۵۸) را در ماتریس R^T که ترانهادهٔ ماتریس R است، پیش‌ضرب می‌کنیم:

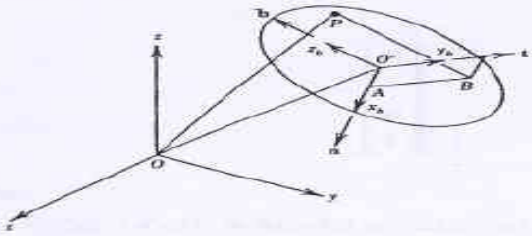
$$R^T X = R^T X_o + R^T R X^b \qquad (۱-۵۹)$$

با توجه به روابط(۱-۵۲)و (۱-۵۲) و ماتریس حاصلضرب $R^T R$ در طرف راست خواهد شد:

$$R^T R = \begin{bmatrix} n^T n & n^T t & n^T b \\ t^T n & t^T t & t^T b \\ b^T n & b^T t & b^T b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۱-۶۰)$$

بنابراین معادلهٔ(۱-۵۹) به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$X^b = -R^T X_o + R^T X \qquad (۱-۶۱)$$



شکل۳-۱: تبدیل مختصات

همانطوری که معادلهٔ (۱-۶۱) نشان می دهد، عکس یک ماتریس متعامد به راحتی توسط ترانهادهٔ آن ماتریس به دست می‌آید:

$$R^{-1} = R^T \qquad (۱-۶۲)$$

۳-۵-۱ تبدیلات همگن

تبدیل ماتریسی که از معادلهٔ (۵۸-۱) به دست آمده را به یاد آورید

$$X = X_o + RX^b$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X^b = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$$

و ماتریس ٤×٤

$$A = \begin{bmatrix} R & \vdots & X_o \\ & \vdots & \\ \cdots & \cdots \vdots & \cdots \\ o & \vdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۱-٦۳)$$

بنابراین معادلهٔ (۵۸-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X = AX^b$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \vdots & X_o \\ & \vdots & \\ \cdots & \cdots \vdots & \cdots \\ o & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (۱-٦٤)$$