بسمه تعالی

توابع مختلط:

یادآوری:

در عدد مختلط $z = x+iy$ که در آن $i=\sqrt{-1}$ ، $Re(z) = x$ و $Im(z) = y$ روابط اولیه زیر برقرار است،

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\bar{z} = x - iy \rightarrow \text{مزدوج } z$$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$$

- اگر $z = x+iy$ و $z_0 = x_0+iy_0$ یک عدد مختلط باشد داریم:

$|z - z_0| = R$ یک دایره به شعاع R و مرکز z_0 است.

$|z-z_0| + |z-z_1| = R$ بیانگر بیضی با کانون‌های z_0 و z_1 است. (با شرط $|z_0-z_1|<R$)

$|z-z_0| - |z-z_1| = R$ بیانگر هذلولی با کانون‌های z_0 و z_1 است. (با شرط $|z_0-z_1|>R$)

رابطه $|z-z_0| = |z-z_1|$ بیانگر عمود منصف پاره خطی است که دو سر آن روی z_0 و z_1 است.

- فرم قطبی یک عدد مختلط به صورت $z = re^{i\theta}$ است که $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

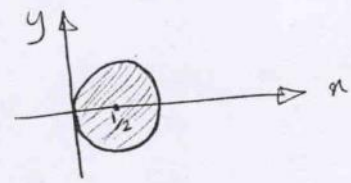
مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که با رابطه $Re(\frac{1}{z})>1$ تعریف می‌شود را مشخص کنید.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$Re(\frac{1}{z}) = \frac{x}{x^2+y^2} > 1 \Rightarrow x^2+y^2-x<0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}$$

پس مکان هندسی مورد نظر داخل دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است.



توابع مختلط :

حد و پیوستگی در توابع مختلط :

- تابع مختلط $w=f(z)$ که $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید، این تابع مختلط f در نقطه z_0 دارای حد است هرگاه هر دو تابع دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دارای حد باشند. همچنین تابع مختلط $w=f(z)$ در $z_0=x_0+iy_0$ پیوسته است هرگاه هر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته باشند.

به عبارت دیگر:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

تذکر: از آنجایی که بحث حد توابع مختلط ارتباط نزدیکی با حد توابع دو متغیره دارد و می دانیم حاصل یک حد دو متغیره در صورت وجود باید منحصر بفرد باشد، لذا اگر از دو طریق مختلفی برای محاسبه یک حد دو متغیره استفاده می شود به دو جواب مختلف منجر شود حاصل آن حد دو متغیره موجود نیست.

مثال: مقدار ثابت α را چقدر انتخاب کنیم تا تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\frac{z+\operatorname{Im} z}{2\bar{z}+\operatorname{Re} z} & z\neq 0\\ \alpha & z=0\end{cases}$ در $z=0$ پیوسته باشد.

حل:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z+\operatorname{Im} z}{2\bar{z}+\operatorname{Re} z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y(i+1)}{3x-2iy}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

اگر ترتیب میل کردن متغیرها به صفر در نظر بگیریم:

۱- اول فرض کردن که $x\to 0$ و بعد $y\to 0$ میل کند.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}=\lim_{y\to 0}\frac{\cancel{y}(i+1)}{-2i\cancel{y}}=\frac{i+1}{-2i}$$

۲- اول فرض کردن $y\to 0$ و بعد $x\to 0$ میل کند.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$$

چون دو جواب مختلف بدست آوردیم تابع در $z=0$ دارای حد نمی باشد و به ازای هیچ مقدار α در این نقطه پیوسته نمی باشد.

ن تابع مختلط :

تابع $f(z)$ در z_0 مشتق پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

همچنین $f'(z)$ درصورت وجود از رابطه زیر نیز بدست می آید:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

مثال: تابع $f(z) = Im(z)$ در کجا پیوسته و در کجا مشتق پذیر است؟

حل: $w = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ Im(z) = y \end{array}\right\} \Rightarrow u = 0 \ , \ v = y \Rightarrow f(z) = y$$

از آنجایی که توابع u و v همه جا پیوسته اند، لذا $f(z)$ همه جا پیوسته است.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{Im(z+\Delta z) - Im(z)}{\Delta z} = \lim_{(\Delta y, \Delta x) \to (0,0)} \frac{y + \Delta y - y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{(\Delta y, \Delta x) \to (0,0)} \frac{\Delta y}{\Delta x + i \Delta y}$$

$$= \begin{cases} \Delta x \to 0 \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{i} \\ \Delta y \to 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

چون حد مذکور موجود نیست لذا $f(z)$ هیچ جا مشتق ندارد.

تعاریف :

- تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی است هرگاه در این نقطه یک همسایگی به شعاع ε از این نقطه مشتق پذیر باشد. بنابراین مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه شرط لازم و نه کافی برای تحلیلی بودن آن تابع در نقطه مذکور است.
- تمام توابع چند جمله ای از z مثل $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ که در آن n عدد طبیعی و $a_0 \dots a_n$ اعداد مختلط باشد همه جا تحلیلی هستند.
- تمام توابع گویا مثل $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ دو چند جمله ای از z هستند در همه جا بجز اصفارهای مخرج تحلیلی هستند.
- توابع $\sin z$ و $\cos z$ و e^z همه جا تحلیلی هستند.
- ترکیب دو تابع تحلیلی، $f \circ g$، یک تابع تحلیلی است.

نقطه تکین:

فرض کنید تابع مختلط $f(z)$ در تمام نقاط بجز نقاطی خاص تحلیلی باشد، به آن نقاط خاص نقاط تکینی تابع گفته می‌شود.
بنابراین اگر تابع هیچ جا تحلیلی نباشد، هیچ نقطه تکینی ندارد.

مثال: در تابع $f(z)=e^{\cos z}+z^2$ چون $\cos z$ و e^z و z^2 تحلیلی هستند پس جمع آنها نیز یک تابع تحلیلی است.

مثال: چون تابع $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ هیچ جا مشتق پذیر نیست (مثال سه قبل) پس در هیچ جا تحلیلی نیست پس اصلاً نقطه تکینی ندارد.

قضایای کوشی ریمان:

الف) قضیه اول کوشی ریمان:

هرگاه تابع مختلط $W=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در $z_0=x_0+iy_0$ مشتق پذیر باشد، آنگاه:

$$f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

و توابع u و v در (x_0,y_0) در شرایط زیر که به معادلات کوشی-ریمان مشهورند صدق می‌کنند:

$$C.R\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

ب) قضیه دوم کوشی ریمان:

در تابع $f(z)=u+iv$ چنانچه توابع u و v در (x_0,y_0) معادلات کوشی ریمان را ارضا کنند و توابع u و v و u_x و v_x و u_y و v_y در نقطه (x_0,y_0) و همسایگی آن پیوسته باشند آنگاه $W=f(z)$ در $z_0=x_0+iy_0$ مشتق پذیر است.

توجه: برقراری $C.R$ در یک نقطه شرط لازم و نه کافی مشتق پذیری تابع در آن نقطه است. بنابراین عدم برقراری $C.R$ در یک نقطه عدم مشتق پذیری تابع مختلط مورد نظر در نقطه مذکور را نتیجه می‌دهد.

تابع مختلط زیر را در نظر بگیرید. این تابع در چه نقاطی مشتق پذیر است؟

$$f(z) = \mathrm{Re}\, z^2 + i z \bar{z}$$

حل:

$$f(z) = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\underbrace{(x^2+y^2)}_{v}$$

$$C.R \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 2y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2y = -2x \end{cases}$$

پس معادلات C.R فقط روی خط $y=x$ برقرار است. چون توابع u و v و u_x و u_y و v_x و v_y همه جا پیوسته است پس تابع در اطراف خط $y=x$ نیز پیوسته است و $f(z)$ در روی خط $y=x$ مشتق پذیر است:

$$f(z) = 2x + i(2x) \quad \leftarrow \text{روی خط } y=x$$

تابع همساز:

تابع حقیقی $h(x,y)$ را تابع همساز گوییم هرگاه معادله لاپلاس را ارضا کند:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

تبصره: چنانچه تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تام باشد یعنی همه جا تحلیلی باشد، آنگاه معادلات کوشی - ریمان همه جا برقرارند و نیز هر دو تابع v و u توابعی همسازند و اصطلاحاً در این شرایط می‌گوییم v مزدوج همساز u است.

مثال: اگر $f(z)=u(y)+iv(x,y)$ تابعی همواره تحلیلی باشد، کلی‌ترین ضابطه آن که $f(z)$ برحسب z دارد را مشخص کنید.

C.R باید برقرار باشد:

$$C.R \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

چون $u=u(y)$ لذا $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ است و از معادله اول داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = v(x)$$

از معادله دوم داریم: $u'(y) = -v'(x) = K \Rightarrow \begin{cases} u(y) = Ky + A \\ v(x) = -Kx + B \end{cases}$

$$\Rightarrow f(z) = Ky + A + i(-Kx+B) = -iK(x+iy) + \underbrace{A+iB}_{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = -iKz + C}$$

نکته: وقتی تابع تحلیلی $f(z)$ برحسب (x,y) پیدا شد، برای نوشتن آن برحسب z کافی است همه xها را به z و همه yها را به صفر تبدیل کنیم.

مثال: چنانچه u مزدوج همساز v و v مزدوج همساز u باشد، توابع u و v باید دارای چه شرطی باشند؟

$$u \text{ مزدوج همساز } v \Rightarrow f = v + iu \rightarrow C.R \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

$$v \text{ مزدوج همساز } u \Rightarrow f = u + iv \rightarrow C.R \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

با مقایسه روابط بالا:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \boxed{u = cte}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \boxed{v = cte}$$

مثال: اولاً مقادیر a و b و c را طوری پیدا کنید تا تابع $u(x,y) = x^4 + ax^2y^2 + 2x^3 + by^4 + cxy^2$ تابع همساز باشد. سپس تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ را پیدا کنید.

حل: u همساز بودن: شرط

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \rightarrow (12x^2 + 2ay^2 + 12x) + (2ax^2 + 12by^2 + 2cx) = 0$$

چون روابط فوق می‌خواهد به ازای هر x و y برقرار باشد پس:

ضریب x^2: $12 + 2a = 0 \rightarrow a = -6$

ضریب y^2: $2a + 12b = 0 \Rightarrow b = 1$

ضریب x: $12 + 2c = 0 \rightarrow c = -6$

قضیه اول کوشی ریمان:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = (4x^3 - 12xy^2 + 6x^2 - 6y^2) - i(-12x^2y + 4y^3 - 12xy)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow z \\ y \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow f'(z) = 4z^3 + 6z^2 \longrightarrow \boxed{f(z) = z^4 + 2z^3 + K}$$